

Přirozená čísla – dělitel a násobek

Každé přirozené číslo lze dělit alespoň dvěma čísly – jedničkou a sebou samým.

Číslo, které má pouze tyto dva dělitele nazýváme **prvočíslo**.

Číslo, které má alespoň tři dělitele, nazýváme **složené číslo**.

Číslo, kterým lze zadanou hodnotu vydělit, nazýváme **dělitel**.

Př. 1: Najdi tři největší a nejmenší složená čísla z čísel $\{1; 2; \dots; 998; 999; 1\ 000\}$.

Složená čísla jsou dělitelná **alespoň třemi čísly**:

4 – dělitele 1, 2, 4

6 – dělitele 1, 2, 3, 6

1 000 – dělitele 1, 2, 4, 5, 8, 10, ...

999 – dělitele 1, 3, 9, ...

998 – dělitele 1, 2, 499, 998

Dělitelnost ověřujeme pomocí pravidel dělitelnosti. Nemusíme prověřovat všechna menší čísla. Například budeme hledat dělitele čísla 100. Stačí prověřit všechna čísla do 10, protože $10 \cdot 10 = 100$. Budeme-li hledat dělitele čísla 1 000, stačí prověřit všechna čísla do 32, protože $32 \cdot 32 = 1024 > 1\ 000$

Prověřujeme tedy do hranice (odmocniny \Leftrightarrow 8. ročník), která po vynásobení samo sebou dá stejně nebo více než prověřované číslo

Pravidla dělitelnosti:

Číslo je dělitelné dvěma \Leftrightarrow je sudé

Číslo je dělitelné třemi \Leftrightarrow ciferný součet je dělitelný třemi

Číslo je dělitelné čtyřmi \Leftrightarrow poslední dvojčíslí je dělitelné čtyřmi

Číslo je dělitelné pěti \Leftrightarrow končí na nulu nebo pětku

Číslo je dělitelné šesti \Leftrightarrow je dělitelné dvěma a třemi

Číslo je dělitelné osmi \Leftrightarrow poslední trojčíslí je dělitelné osmi

Číslo je dělitelné devíti \Leftrightarrow ciferný součet je dělitelný devíti

Číslo je dělitelné deseti \Leftrightarrow končí nulou

Dělitelnost sedmi je rychlejší vyzkoušet než používat pravidlo.

Obecně lze sestavit pravidlo pro jakoukoliv dělitelnost

Př. 2: Najdi tři největší a nejmenší prvočísla v množině čísel $\{100; 101; 102; \dots; 998; 999; 1\ 000\}$.

Prvočísla nemohou být sudá (kromě 2)

101 = 1 . 101 pouze dva dělitele \Rightarrow prvočíslo

103 = 1 . 103 pouze dva dělitele \Rightarrow prvočíslo

105 = 5 . 21 = 5 . 3 . 7 více dělitelů

107 = 1 . 107 pouze dva dělitele \Rightarrow prvočíslo

999 = 9 . 111 pouze dva dělitele \Rightarrow prvočíslo

997 = 1 . 997 více dělitelů

$995 = 5 \cdot 21 = 5 \cdot 3 \cdot 7$	více dělitelů	
$993 = 3 \cdot 331$	pouze dva dělitele	\Rightarrow prvočíslo
$991 = 1 \cdot 991$	více dělitelů	
$989 = 23 \cdot 43$	více dělitelů	
$987 = 3 \cdot 329$	více dělitelů	
$985 = 5 \cdot 197$	více dělitelů	
$983 = 1 \cdot 983$	pouze dva dělitele	\Rightarrow prvočíslo

Př. 3: Najdi všechna prvočísla menší než 50.

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47

Rozklad na součin prvočísel

Každé složené číslo lze napsat jako výsledek násobení. Rozepíšeme-li násobení tak, že jsou všichni součinitelé prvočísla \Leftrightarrow rozklad na prvočísla.

Př. 4: Rozlož číslo 360 na součin prvočísel.

$$360 = 10 \cdot 36 = 2 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 4 = 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \leftrightarrow \text{seřadit podle velikosti} = \underline{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5}$$

Společný dělitel

Společný dělitel dvou hodnot je takové číslo, kterým jsou dělitelné obě hodnoty. Hledá se nejsnáze pomocí rozkladu na prvočísla. Každá dvě čísla mají alespoň jednoho společného dělitele, číslo 1.

Př. 5: Najdi všechny společné dělitele čísel 120, 168.

$$120 = 10 \cdot 12 = 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 4 = 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$168 = 8 \cdot 21 = 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 7 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$$

$$120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$168 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$$

Společní dělitelé jsou čísla: 1, 2, 3, 4 (2.2), 6 (2.3), 8 (2.2.2), 12 (2.2.3), 24(2.2.2.3).

Čísla, která mají aspoň dva společné dělitele, nazýváme **soudělná**.

Čísla, která mají jen jednoho společného dělitele (1), nazýváme **nesoudělná**.

Společný násobek

Společný násobek dvou čísel je taková hodnota, která je dělitelná oběma čísly.

Př. 6: Najdi všechny společné násobky čísel 126, 84.

$$126 = 3 \cdot 42 = 3 \cdot 6 \cdot 7 = 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$$

$$84 = 4 \cdot 21 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$$

$$126 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$$

$$84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$$

Násobek musí jít dělit číslem 126. musí tedy obsahovat přinejmenším rozklad $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$
Násobek musí jít dělit číslem 84. musí tedy obsahovat přinejmenším rozklad $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$

nejmenší násobek tedy musí obsahovat:

$$n = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$$

$$n = 4 \cdot 9 \cdot 7 = \underline{252}$$

Nejmenší společný násobek čísel 84 a 126 je číslo 252 $\Leftrightarrow \text{nsn}(84; 126) = 252$
Společných násobků je nekonečně mnoho. Jsou to násobky čísla 252.

Př. 7: Najdi všechny společné násobky čísel 126, 168 menší než 500.

$$126 = 6 \cdot 21 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$$

$$168 = 8 \cdot 21 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$$

$$\text{nsn}(126, 168) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 504$$

Neexistuje společný násobek těchto čísel menší než 500.

Př. 8: Najdi největší společný dělitel a nejmenší společný násobek čísel 90, 252, 378.

$$90 = 9 \cdot 10 = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$$

$$252 = 4 \cdot 63 = 2 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 7 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$$

$$378 = 9 \cdot 42 = 3 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 7 = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$$

$$\text{NSD}(90, 252, 378) = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$$

$$\text{nsn}(90, 252, 378) = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 3 = 3780$$

Př. 9: Jakým největším číslem jde vždy dělit násobek tří po sobě jdoucích přirozených čísel?

Tři jdou po sobě: jedno bude určitě sudé, jedno bude dělitelné třemi $\Rightarrow \text{NSD} = 6$

Př. 10: Jakým největším číslem jde vždy dělit násobek čtyř po sobě jdoucích přirozených čísel?

Čtyři jdou po sobě: dvě budou určitě sudé, jedno z nich dělitelné čtyřmi,
jedno bude dělitelné třemi $\Rightarrow \text{NSD} = 24$

Př. 11: V pondělí nastoupili vojáci ve skupinách po 24. V úterý nastoupily ve skupinách po 30 a ve středu nastoupily ve skupinách po 15. Pokaždé nikdo nechyběl ani nepřebýval. Kolik bylo vojáků, jestliže jich bylo méně než 300?

Dané číslo musí být dělitelné 24, 30 a 40. Hledáme tedy společný násobek.

$$24 = 4 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$$

$$30 = 2 \cdot 15 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$40 = 8 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$$

$$\text{nsn}(24; 30; 40) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 120$$

Vojáků mohlo být 120 nebo 240.

Př. 12: První autobus vyjíždí ze zastávky v 8:00 a okruh městem mu trvá 45 minut. Druhý vyjíždí v 8:00 a jeden okruh mu trvá 40 minut. Třetí vyjíždí v 8:00 a okruh mu trvá 50 minut. Kolikrát denně se setkají na zastávce všechny tři autobusy najednou? V kolik hodin to bude?

$$45 = 9 \cdot 5 = 3 \cdot 3 \cdot 5$$

$$40 = 8 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$$

$$50 = 10 \cdot 5 = 2 \cdot 5 \cdot 5$$

$$\text{nsn}(40; 45; 50) = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 1800 \text{ minut.}$$

$$1800 \text{ minut} = 30 \text{ hodin}$$

Autobusy se během dne již na zastávce nepotkají.

Př. 13: Žáci devátých tříd při tělocviku nastoupili do dvoustupu a jeden žák přebýval. Když nastoupili do trojstupu, také jeden přebýval. Když nastoupili do čtyřstupu, stále jeden přebýval. Když nastoupili do pětistupu, jeden přebýval. Kolik žáků je v 9.A, jestliže v 9.A je stejně žáků jako v 9. B a v 9. C je o jednoho žáka více. V každé třídě je méně než třicet žáků.

Počet žáků je lichý.

Při dělení 2, 3, 4, 5 vždy zůstane jeden. \Rightarrow dáme jednoho pryč a počet bude dělitelný 2, 3, 4, 5

$$\text{nsn}(2; 3; 4; 5) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$

Minimální počet je 61.

122 – není lichý počet a je to více než 90 žáků.

61 do tří tříd, dvě mají stejně, jedna o jeden více \Rightarrow V 9.A je 20 žáků.